e^ix = cos(x) + isin(x).

Esta es la fórmula de Euler, y nos dice que e^ix, la exponencial imaginaria, es un número complejo de parte real cos(x) y parte imaginaria sin(x). Esto significa que se encuentra en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, es decir tiene módulo 1, y además su ángulo es x.

Pero, ¿por qué esta fórmula es cierta? ¿Qué significa elevar a un exponente imaginario, y por qué todo esto tiene sentido?

La demostración más conocida de la fórmula de Euler, usa algo llamado “series de Taylor”. Pero esta demostración es algo complicada, poco intuitiva, y no aclara mucho por qué la fórmula tiene sentido. Así que en este video les quiero mostrar algo distinto. Quiero mostrarles de manera gráfica e intuitiva la conexión entre la exponencial y las funciones trigonométricas, de manera que tenga sentido y se sienta como lo más lógico, como algo que simplemente no podía ser de otra manera.

Sin más que agregar, les presento: la fórmula de Euler.

---

**La función cis y la exponencial**

Si hay algo en lo que destacan los números complejos, es en representar rotaciones en un plano.

Multiplicar por un número complejo w, significa rotar todo el plano complejo en el ángulo que te dicte el argumento de w, que es el ángulo que forma con el eje real, y también estirarlo o comprimirlo según te diga su módulo, que es su distancia al origen. Es decir, al multiplicar un número z por un número w, lo rotas en un ángulo, que es el argumento de w, y escalas su módulo según te diga el módulo de w, para obtener el producto wz. Entonces este producto tiene un módulo igual al producto de los módulos de w y de z, y un argumento igual a la **suma** de los argumentos de w y z.

Por estas propiedades suele ser útil expresar los números complejos en su forma polar: o sea, respecto de su módulo y argumento. Si tienes un número z y conoces su módulo y su argumento, digamos “alfa”, usando trigonometría puedes expresar su parte real como |z|cos(alfa), y su parte imaginaria como |z|sin(alfa). Juntando todo eso, z puede expresarse como “módulo de z, por coseno + iseno de alfa”. El coseno más iseno se puede abreviar como la función cis, y la expresión final queda como |z|cis(alfa). Esta es la forma polar del número z.

De manera similar, nuestro número w se puede expresar como |w|cis(beta), donde beta es el argumento de w. Entonces, multiplicar por este número significa dos cosas: por una parte es multiplicar por |w|, que significa estirar o comprimir el plano en ese factor, sin rotarlo. Y por otra parte, es multiplicar por cis(beta), y el significado de multiplicar por cis(beta) es rotar el plano en un ángulo beta, sin estirarlo ni comprimirlo. cis(beta) representa un número en la circunferencia unitaria, que forma un ángulo beta con el eje real.

Así que cuando nuestro número z lo multiplicamos por nuestro número w, el resultado es el siguiente. Lo podemos reorganizar como |w||z|cis(beta)cis(alfa). Según las reglas que dijimos antes, el producto de los módulos resulta ser el módulo del producto, y también cis(beta)\*cis(alfa) = cis(beta + alfa). Tiene sentido, porque rotar por alfa, y luego rotar por beta, es lo mismo que rotar por alfa más beta. Y es en esto último donde me quiero detener, porque nadie, o casi nadie, pone el suficiente énfasis en este punto.

cis(x)\*cis(y) = cis(x + y). “Multiplicar números complejos implica sumar sus ángulos”. Piensa en esa frase. Multiplicar dos cosas conlleva la suma de algo. ¿Te suena familiar esto? Pues se parece mucho a cómo funcionan las potencias: “multiplicar potencias de la misma base implica sumar sus exponentes”. b^x \* b^y = b^(x+y). La forma en que funcionan los ángulos de los números complejos, es muy parecida a cómo funcionan los exponentes de las potencias. Y eso no es todo, porque si evalúas la función cis en 0, como cis es igual a coseno + iseno, cos(0) = 1, y sin(0) = 0, así que cis(0) = 1. En comparación, un número b cualquiera, elevado a 0, también da 1. Otro punto en común. Y es que, a partir de estas dos propiedades se pueden deducir varias más, como por ejemplo: 1/cis(x) = cis(-x), cis(x)/cis(y) = cis(x-y), y el importante teorema de de Moivre, cis(x)^n = cis(nx), donde n es un número entero. **Todas** estas propiedades son exactamente las mismas que tienen las potencias, por todas partes la función cis actúa como exponencial. De hecho, la definición de exponencial es que una función f es exponencial si cumple que f(x)\*f(y) = f(x+y), y que f(0) = 1. Y la función cis cumple esas dos propiedades básicas. Resulta que la función cis sí es una función exponencial, así que se podría escribir de la forma b^kx.

Así, un número complejo z podría reescribirse como |z|b^(k\*alfa), y un número w como |w|b^(k\*beta). Al multiplicarlos, se pueden aplicar propiedades de exponenciales, y el resultado se puede expresar como |w||z|b^(k\*(beta+alfa)).

Ahora, esta idea puede parecer extraña al inicio, así que voy a mostrar un ejemplo para acomodarnos con esta idea.

Piensa en el número i, que representa una rotación en 90°. i², que es multiplicar dos veces por i, es rotar dos veces en 90°, o sea 180°, que corresponde a -1. i³ son 3 rotaciones en 90°, i⁴ son 4 rotaciones, y así. En general, i^n representa rotar n veces en 90° en sentido antihorario, con el detalle de que si n es negativo, significa rotar en el sentido opuesto, en sentido horario. El exponente n te dice **cuántas** rotaciones hacer, así que de cierta forma te da **información sobre el ángulo que va a tener el resultado final**. Para llevar más lejos esto, si rotas 3 veces y luego otras 2, es lo mismo que rotar 5 veces en total. Esto se puede representar como tomar i³ y multiplicarlo por i², y por reglas de potencias se suman los exponentes, 2 y 3, para dar como resultado i⁵. O sea, los exponentes que de cierta forma representan ángulos, se **suman**, dando como resultado i elevado a la **suma** de esos ángulos.

Así que realmente no es tan loco colocar el ángulo de un número complejo como el exponente de una potencia, y no es tan raro decir que la función cis puede ser igual a cierta potencia b^kx. Pero, ¿a cuál potencia?

Podríamos tratar de igualarla a una potencia de base i. cis(x) igual a i^kx. Trabajando en radianes, cuando x = pi/2, tenemos i^kpi/2 que debería ser igual a i, o i¹. Por ende, k debe ser igual a 1 / (pi/2). Así que cis(x) sería igual a i^[x/(pi/2)], y tendría sentido. cis(pi/2) sería igual a i¹, cis(pi) sería igual a i² que sería -1, y así. Todo bien hasta ahora, ¿pero qué pasaría con cis(pi/4)? Por un lado, cis(pi/4) sería igual a raíz(2)/2 + raíz(2)/2 \* i. pero por el otro lado nos quedaría i^(1/2), o sea, la raíz de i. Y existen 2 números que al cuadrado dan i. Por un lado, si i representa rotar en 90° o pi/2 radianes, puedes pensar que la raíz de i es solo rotar en 45°, o pi/4 radianes, o sea multiplicar por cis(pi/4), que es el número de antes. Pero por otro lado, puedes pensar en i como rotar 270° **en el sentido opuesto**, o sea en sentido horario, y en ese caso la mitad de eso es rotar 135° en sentido horario, o 3Pi/4 radianes, que corresponde a multiplicar por cis(-3pi/4), que en este caso resulta ser el número opuesto a cis(pi/4). Ambos números al cuadrado dan como resultado i.

Entonces, no puedes llegar e igualar cis(pi/4) a i ^ (½), porque elevar a ½ trae problemas. En general, solo puedes elevar el número i a números enteros sin tener conflictos. Si intentas elevarlo a cualquier otro número no entero, vas a obtener múltiples resultados distintos.

Y eso es complicado, porque el argumento de la función cis puede tomar cualquier valor en un continuo y así abarcar todos los infinitos puntos de la circunferencia unitaria. Si el exponente de la potencia de i está limitado a solo tomar valores discretos, y la potencia solo es capaz de abarcar unos pocos puntos de esta circunferencia, no puedes llegar e igualar la función cis a una potencia de i. Y esto no solo ocurre con el número i, sino con casi todos los números complejos: si se elevan a un valor no entero, hay múltiples resultados. Por ende, no puedes llegar e igualar la función cis a una potencia de un número complejo de esta circunferencia.

¿Significa eso que todo está perdido y no hay nada que hacer? Pues resulta que todavía nos queda una estrategia.

Si bien las potencias de i no pueden abarcar todos los puntos de la circunferencia unitaria, sí pueden abarcar 4 puntos distintos: 1, i, -1 y -i. Eso es porque i forma un ángulo de 90°, y como la circunferencia completa son 360°, 360 / 90 = 4. Por ende, sus potencias abarcan 4 puntos. Eso es muy poco. Ojalá pudiéramos abarcar más que solo 4 puntos. ¿Hay alguna forma de hacer eso? Y la respuesta es sí, puedes hacer eso si tomas un número que tenga un ángulo más pequeño, como por ejemplo, un ángulo de 45° o pi/4 radianes. Este número sería cis(pi/4), que ya dijimos que era raíz(2)/2 + raíz(2)/2 \* i. Como 360 / 45 = 8, las potencias de este número pueden abarcar 8 puntos de esta circunferencia: más que los 4 puntos que teníamos antes.

Ahora, la idea es tener la mayor cantidad posible de puntos, así que podemos ir achicando cada vez más el ángulo de nuestro número. La idea es que si tienes un número en esta circunferencia con un ángulo infinitamente pequeño, sus potencias cubrirían una cantidad infinitamente grande de puntos, y eso es justo lo que queremos.

Entonces, el número que necesitamos es cis de un ángulo infinitamente pequeño que llamaremos omega. Aquí entramos en lo que es cálculo infinitesimal, porque estamos pensando en qué valor va tomando cis(omega) cuando omega es un infinitesimal, un valor infinitamente pequeño. Como cis es coseno más iseno, podemos hacer algunas aproximaciones. Por ejemplo, si miramos muy cerca, nos daremos cuenta que el seno de omega, un ángulo muy pequeño, mide casi lo mismo que el arco abarcado por omega. Si nuestros ángulos están en radianes, ese arco mide exactamente omega. Así que podemos hacer la aproximación “sen(omega) aproximadamente igual a omega” cuando omega es un ángulo muy pequeño, y esto se hace más exacto a medida que omega sea más pequeño. Esto equivale a un límite bastante conocido: el límite, cuando omega tiende a 0, de sen(omega) / omega, es 1. Por otra parte, el coseno de un ángulo muy pequeño es prácticamente igual a 1. Así, cis(omega), que no es nada más que cos(omega) + isen(omega), es aproximadamente igual a 1 + i\*omega, cuando omega es un ángulo muy pequeño.

Con eso en mente, para obtener cualquier número en esta circunferencia, solo hay que elevar nuestro cis(omega) a un número entero lo suficientemente grande.

Si lo elevamos a un entero n, el resultado es un número de ángulo n\*omega. Si queremos obtener un ángulo en especial, digamos “x”, tenemos que escoger nuestros valores de n y de omega, de manera que n\*omega = x. Una manera sería despejar n y obtener que debe ser igual a x / omega. Entonces nuestro cis(omega) lo elevamos a x/omega, y en teoría obtenemos cis((x/omega) \* omega), o sea cis(x). Pero recordemos que esto solo funciona si nuestro exponente es un número entero, y como x y omega son números reales, no podemos asegurar que esta fracción dé un entero. Así que es complicado llegar e intentar despejar n de esta relación. En vez de eso, una mejor idea sería despejar omega, y obtener que debe ser igual a x/n, donde exigimos que n sea un entero. Ahora, en vez de tener un ángulo omega cualquiera, tenemos un ángulo x/n, la eneava parte de cierto ángulo x, donde n es un número entero muy grande. Si elevamos este cis(x/n) a n, terminamos recuperando nuestro cis(x) original. Ahora, si n tiende a infinito, el ángulo x/n tiende a 0, así que podemos hacer nuestras aproximaciones: sin(x/n) = x/n, y cos(x/n) = 1, y así decimos que cis(x/n) es aproximadamente igual a 1 + ix/n. Entonces, al elevar ambos lados a n, parece lógico que cis(x) sea aproximadamente igual a (1 + ix/n)^n, donde n tiende a infinito.

Ahora, ojo, todo este raciocinio es bien informal. Realmente nunca hemos demostrado formalmente que esto sea así, pero por ahora solo quiero que entiendas el concepto de manera intuitiva, dejando las formalidades de lado. Solo diré que esta relación sí se puede demostrar: efectivamente, cis(x) es igual al límite de esta expresión, cuando n tiende a infinito. Pero prefiero dejar las demostraciones para otro video. Ahora fíjate muy bien en esta expresión, porque es muy especial. ¿Te parece familiar?

Si te das cuenta, se parece mucho a la definición de la función exponencial e^x. Recordemos que podemos definir e^x como el límite, cuando n tiende a infinito, de (1 + x/n)^n. Esto básicamente representa un número muy, pero muy cercano a 1, que es multiplicado por sí mismo muchas veces hasta tomar un valor que ya no es tan cercano a 1. Por lo general, x es un número real, pero es perfectamente posible reemplazarlo en esta expresión por un valor complejo z. En ese caso el sentido de la expresión sigue siendo el mismo: un número muy cercano a 1, elevado a un número muy grande. Pero recuerda que e^x era igual a esta expresión, y si ahí reemplazamos x por z, también tenemos que hacerlo en la exponencial, y nos queda e elevado a un número complejo z: una exponencial compleja. ¿Acaso elevar a un número complejo tiene algún sentido? Inicialmente, no lo tiene, pero podemos asignarle un sentido ahora mismo. Simplemente definimos la exponencial compleja e^z como el límite de esta misma expresión, pero esta vez con un número complejo z.

Y esto, resulta que es totalmente válido, porque podemos verificar que las propiedades esenciales de la exponencial se conservan, incluso si el exponente es complejo. Y ojo, esto significa que, si un número z lo puedes descomponer en sus partes real e imaginaria, es decir, z = a + bi, entonces e^z = e^(a+bi), y por propiedades se puede descomponer en (e^a)(e^bi). Y ya sabemos qué pasa con la exponencial real. Cuando el exponente es positivo, el resultado se aleja del origen, y cuando es negativo, se acerca al origen. Ahora solo nos interesa saber qué ocurre con la exponencial imaginaria, en especial porque acabamos de encontrar que cis(x) es igual a esta expresión, que sería igual a una exponencial imaginaria e^ix. Entonces, ¿qué pasa cuando en esta expresión colocamos un número imaginario ix?

Lo que ocurre, es que el resultado ROTA alrededor del origen, sin alejarse ni acercarse a este. Se mantiene a una distancia de 1 del origen, lo que significa que tiene módulo 1, encontrándose en la circunferencia unitaria. Como no se aleja ni se acerca al origen, ninguna de estas distancias entre puntos se alarga ni acorta. Todas miden lo mismo: x/n. Y como son n segmentos, la distancia recorrida suma en total x. El número e^ix recorre un arco x alrededor de la circunferencia unitaria. Así que, ¿cuál es el argumento de e^ix? Si usas radianes, entonces el ángulo es exactamente igual al arco, o sea x.

De esta manera, como e^ix tiene módulo 1 y argumento x, se puede expresar como cis(x). En otras palabras, e^ix = cos(x) + isin(x). Esta, es la fórmula de Euler.

Esto es todo por este video. Si te gustó, no olvides darle like, suscribirte al canal y darle a la campanita para recibir notificaciones cuando suba más videos. Nos vemos en otro video, hasta pronto.